Exercice 1:

1. On s'intéresse à la fonction $f : x \mapsto \sin(x)\mathbf{e}^x$ définie sur $\mathbb{R}$.
Pour montrer qu'elle n'est pas majorée, nous allons exhiber une suite de points $(u_n)_{n\geqslant 0}$ pour lesquels la suite des images $(f(u_n))_{n\geqslant 0}$ va tendre vers $+\infty$. Prenons par exemple $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

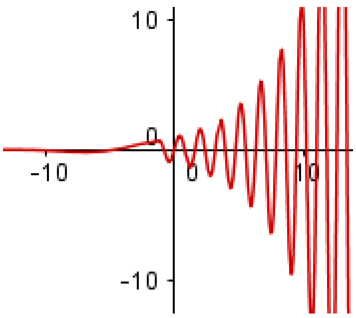
$\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\mathbf{e}^{\frac{\pi}{2}+2\pi n} = \mathbf{e}^{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbf{e}^{\frac{\pi}{2}+2\pi n} = +\infty$ donc la suite n'est pas majorée.

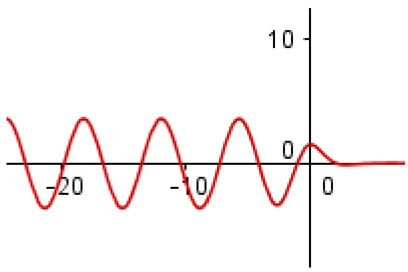
Pour montrer qu'elle n'est pas minorée, nous allons exhiber une suite de points $(w_n)_{n\geqslant 0}$ pour lesquels la suite des images $(f(w_n))_{n\geqslant 0}$ va tendre vers $-\infty$. Prenons par exemple $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ f(w_n) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\mathbf{e}^{-\frac{\pi}{2}+2\pi n} = -\mathbf{e}^{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$.
Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\mathbf{e}^{-\frac{\pi}{2}+2\pi n} = -\infty$ donc la suite n'est pas minorée.

2. On s'intéresse à la fonction $g : x \mapsto \frac{3\cos(x)+2\sin(x)}{1+\mathbf{e}^x}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Cette fonction est bornée sur $\mathbb{R}$ par -5 et 5. En effet, soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcll}
\left|\dfrac{3\cos(x)+2\sin(x)}{1+\mathbf{e}^x}\right| & = & \dfrac{|3\cos(x)+2\sin(x)|}{1+\mathbf{e}^x} & \\
1+\mathbf{e}^x & \geqslant & 1 & \\
0 \leqslant \dfrac{1}{1+\mathbf{e}^x} & \leqslant & 1 & \text{car la fonction } x \to \dfrac{1}{x} \text{ est décroissante sur }]0;+\infty[\\
0 \leqslant \dfrac{|3\cos(x)+2\sin(x)|}{1+\mathbf{e}^x} & \leqslant & |3\cos(x)+2\sin(x)| & \text{multiplication par un nombre positif} \\
\text{Or, } |3\cos(x)+2\sin(x)| & \leqslant & |3\cos(x)|+|2\sin(x)| \leqslant 5 & \\
\text{Donc, } \left|\dfrac{3\cos(x)+2\sin(x)}{1+\mathbf{e}^x}\right| & \leqslant & 5 &
\end{array}$$





Exercice 2:

1. $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$. Nous devons maintenant comparer D_g à $f(D_f)$ pour savoir si les valeurs prises par f appartiennent bien à l'ensemble D_g.
La fonction f est une fonction polynomiale dont le sommet se situe en $\frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$ et $f(1) = 2$. Puisque le coefficient directeur du polynôme associé est positif, on sait que le sommet est un minimum global de la fonction donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant 2$.

La fonction f ne prend que des valeurs supérieures à 2 donc supérieures à 0. Ainsi, $f(D_f) \subset D_g$ et on peut définir la composée $g \circ f$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g \circ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}.$$

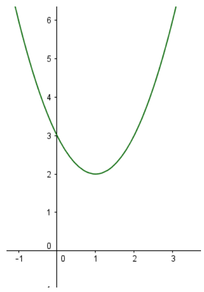
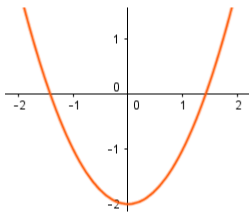


Figure 1: Représentation graphique de la fonction f du 1)

2. Ici aussi $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}_+^*$.
La fonction f est un polynôme dont le sommet se situe en $\frac{-b}{2a} = 0$ et $f(0) = -2$ donc la courbe de f coupe l'axe des abscisses en 2 points $(-\sqrt{2}, 0)$ et $(\sqrt{2}, 0)$.



La fonction f est strictement positive sur $]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ donc la fonction $g \circ f$ est définie sur cet ensemble par

$$\forall x \in]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[,\ g \circ f(x) = \ln(x^2 - 2).$$

<u>Exercice</u> <u>3:</u>

1. f est définie comme un quotient de deux polynômes de degré 1. La seule contrainte est que le dénominateur ne s'annule pas.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3x - 2 \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{2}{3}\right\}$$

2. Nous allons étudier les variations de f sur D_f. La fonction f est dérivable sur D_f comme quotient de fonctions dérivables sur D_f avec un dénominateur qui ne s'annule pas et

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{2}{3}\right\},\ f'(x) = \frac{2(3x-2) - 3(2x+1)}{(3x-2)^2} = \frac{-7}{(3x-2)^2}.$$

f' est strictement négative sur $]-\infty, \frac{2}{3}[$ et sur $]\frac{2}{3}, +\infty[$ donc f est strictement décroissante sur chacun de ces intervalles.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$ $\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$ $\searrow$	$\frac{2}{3}$

La fonction f est continue sur $]-\infty, \frac{2}{3}[$. Elle prend donc toutes les valeurs entre $-\infty$ et $\frac{2}{3}$. De même, elle est continue sur $]\frac{2}{3}, +\infty[$ et elle prend toutes les valeurs entre $\frac{2}{3}$ et $+\infty$.
Ainsi, $f(D_f) = \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\}$.
Soit $y \in]-\infty, \frac{2}{3}[$. Puisque la fonction f est strictement décroissante et continue sur $]-\infty, \frac{2}{3}[$ à valeurs dans $]-\infty, \frac{2}{3}[$, y admet un unique antécédent dans $]-\infty, \frac{2}{3}[$. De plus, puisque $f(]\frac{2}{3}, +\infty[) =]\frac{2}{3}, +\infty[$, y n'admet d'antécédent par f dans $]\frac{2}{3}, +\infty[$. De même, $y \in]\frac{2}{3}, +\infty[$ admet un unique antécédent dans $]\frac{2}{3}; +\infty[$ et aucun antécédent dans $]-\infty; \frac{2}{3}[$.
En résumé, $\forall y \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\},\ \exists! x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\},\ f(x) = y$.
La fonction f est donc une bijection de $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\}$ sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\}$.

3.
$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\},\ f\circ f(x) = f[f(x)] = \frac{2\times\frac{2x+1}{3x-2}+1}{3\times\frac{2x+1}{3x-2}-2} = \frac{\frac{2(2x-1)+(3x-2)}{3x-2}}{\frac{3(2x+1)-2}{3x-2}} = \frac{7x}{7} = x$$

Or, on a vu que la bijection réciproque de f de F sur E, notée f^{-1}, est la seule fonction g telle que $f\circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$ donc $f^{-1} = f$.

Remarque: La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ est aussi une involution.

Exercice 4: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) \neq x$.

1. Si $f(x) > x$, alors $f(f(x)) \geqslant f(x)$ i.e. $x \geqslant f(x)$, absurde.
2. Si $f(x) < x$, alors $f(f(x)) \leqslant f(x)$ i.e. $x \leqslant f(x)$, absurde.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = x$.

Exercice 5:

1. La fonction $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition.
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$. On peut donc dresser le tableau de variation de f :

x	0		1		$\mathbf{e}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$		$+$		0	$-$	
$f(x)$	$\Vert$ $-\infty$	↗	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tq $2 \leqslant a < b$.
$a^b = b^a \iff b\ln(a) = a\ln(b) \iff \frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b} \iff a = 2$ et $b = 4$
3. $\mathbf{e}^\pi > \pi^{\mathbf{e}} \iff \frac{\ln(\mathbf{e})}{\mathbf{e}} > \frac{\ln(\pi)}{\pi} \iff f(\mathbf{e}) > f(\pi)$.
Donc $\mathbf{e}^\pi > \pi^{\mathbf{e}}$.

Exercice 6:

1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction f_λ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule jamais et

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda'(x) = \frac{x^2+1-(x+\lambda)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2\lambda x+1}{(x^2+1)^2}$$

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f_λ au point d'abscisse $x=0$ est $f_\lambda'(0)=1$. Toutes les tangentes ont le même coefficient directeur, elles sont donc bien parallèles.

2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, notons Δ_λ la tangente à la courbe représentative de la fonction f_λ au point d'abscisse $x=1$. On a

$$\begin{aligned} \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \Delta_\lambda\ :\ y &= f_\lambda'(1)(x-1)+f_\lambda(1) \\ \Delta_\lambda\ :\ y &= \frac{-\lambda}{2}(x-1)+\frac{\lambda+1}{2} \end{aligned}$$

On cherche un point $A(x_A, y_A)$ qui appartiendrait à toutes les droites Δ_λ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ y_A = \frac{-\lambda}{2}(x_A-1)+\frac{\lambda+1}{2}$$

On va raisonner par *analyse et synthèse.*

- **Analyse:** Supposons que ce point A existe, c'est-à-dire qu'il soit bien le point d'intersection de toutes les tangente Δ_λ. C'est en particulier vrai pour $\lambda=0$ et $\lambda=1$. Donc, le point A est solution du système

$$\left\{\begin{array}{l} y_A = \frac{1}{2} \\ y_A = \frac{-1}{2}(x_A-1)+1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_A = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} = \frac{-x_A}{2}+\frac{3}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_A = \frac{1}{2} \\ -1 = \frac{-x_A}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y_A = \frac{1}{2} \\ x_A = 2 \end{array}\right.$$

Si le point existe, ça ne peut être que le point $A(2, \frac{1}{2})$.

- **Synthèse:** Montrons que le point $A(2, \frac{1}{2})$ convient.

$$\begin{array}{lll} \forall \lambda \in \mathbb{R} & , & \frac{-\lambda}{2}(x_A-1)+\frac{\lambda+1}{2} = \frac{-\lambda}{2}+\frac{\lambda+1}{2} = \frac{1}{2} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} & , & A \in \Delta_\lambda \end{array}$$

Le point $A(2, \frac{1}{2})$ est donc bien le point d'intersection de toutes les tangente à la courbe C_f au point d'abscisse $x=1$.

Exercice 7:

1. $D_f = \{x \in \mathbb{R},\ 2+\cos(x) > 0\}$. Or,

$$\begin{gathered} \forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \\ \text{d' où } \forall x \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant 2+\cos(x) \leqslant 3 \end{gathered}$$

donc $D_f = \mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[1,3]$ et d'une fonction dérivable sur $[1,3]$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sin(x) \times \frac{1}{2+\cos(x)} = \frac{-\sin(x)}{2+\cos(x)}.$$

2. $D_g = \{x \in \mathbb{R},\ x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^*$. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de la fonction $x \mapsto \mathbf{e}^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g'(x) = \frac{2}{x^3}\mathbf{e}^{\frac{-1}{x^2}}$$

3.

$$\begin{array}{rcl} D_h & = & \{x\in\mathbb{R},\ 1-x>0 \text{ et } 1+\ln(1-x)\geqslant 0\} = \{x\in\mathbb{R},\ x<1 \text{ et } \ln(1-x)\geqslant -1\} \\ & = & \left\{x\in\mathbb{R},\ x<1 \text{ et } 1-x\geqslant \mathbf{e}^{-1}\right\} = \left\{x\in\mathbb{R},\ x<1 \text{ et } x\leqslant 1-\mathbf{e}^{-1}\right\} \\ D_h & = &]-\infty, 1-\mathbf{e}^{-1}] \end{array}$$

La fonction h est dérivable sur $]-\infty,1-\mathbf{e}^{-1}[$ comme composée de la fonction $x\mapsto 1+\ln(1-x)$ dérivable sur $]-\infty,1-\mathbf{e}^{-1}[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$et

$$\forall x\in]-\infty,1-\mathbf{e}^{-1}[,\ h'(x)=\frac{-1}{1-x}\times\frac{1}{2\sqrt{1+\ln(1-x)}}=\frac{1}{2(x-1)\sqrt{1+\ln(1-x)}}$$

4. $D_l=\{x\in\mathbb{R},\ x>0 \text{ et } \ln(x)>0\}=\{x\in\mathbb{R},\ x>0 \text{ et } x>1\}=]1;+\infty[$.
La fonction l est dérivable sur $]1;+\infty[$ comme composée de la fonction $x\mapsto\ln(x)$ dérivable sur $]1;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et de la fonction $x\mapsto\ln(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a :

$$\forall x\in]1;+\infty[,\ l'(x)=\frac{1}{x}\times\frac{1}{\ln(x)}=\frac{1}{x\ln(x)}$$

Remarque: Ceci nous dit aussi que la fonction $x\mapsto\ln(\ln(x))$ est une primitive de la fonction $x\mapsto\frac{1}{x\ln(x)}$ sur $]1;+\infty[$.

Exercice 8:

a) La fonction $x\mapsto\frac{x^2-1}{2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule jamais. La fonction $x\mapsto\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \varphi'(x)=\frac{2x\times 2x-2(x^2-1)}{4x^2}-\frac{1}{x}=\frac{2x^2+2-4x}{4x^2}=\frac{(x-1)^2}{2x^2}$$

La fonction φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\varphi(1)=0$.

x	0		1		$+\infty$
$\varphi'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
$\varphi(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Donc, $\forall x\in]0,1],\ \varphi(x)\leqslant 0$ et $\forall x\in]1,+\infty[,\ \varphi(x)>0$. On va montrer que ces deux inégalités entraîne l'inégalité demandée.

$$\begin{array}{rcll} \forall x\in]0,1[,\ \varphi(x) & < & 0 & \\ \dfrac{x^2-1}{2x}-\ln(x) & < & 0 & \\ \dfrac{x^2-1}{2x} & < & \ln(x) & \\ \dfrac{x^2-1}{2} & < & x\ln(x) & \text{car } x>0 \\ \dfrac{1}{2} & > & \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1} & \text{car } x^2-1<0 \\ \forall x\in]0,1[,\ \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1}-\dfrac{1}{2} & < & 0 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\forall x \in]1,+\infty[,\ \varphi(x) & > & 0 \\
\dfrac{x^2-1}{2x} - \ln(x) & > & 0 \\
\dfrac{x^2-1}{2x} & > & \ln(x) \\
\dfrac{x^2-1}{2} & > & x\ln(x) \qquad \text{car } x>0 \\
\dfrac{1}{2} & > & \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1} \qquad \text{car } x^2-1>0 \\
\forall x \in]1,+\infty[,\ \dfrac{x\ln(x)}{x^2-1} - \dfrac{1}{2} & < & 0
\end{array}$$

On a donc bien montré que: $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}\,,\ \frac{x\ln(x)}{x^2-1} - \frac{1}{2} < 0$.

<u>Exercice 9</u>: On s'intéresse à la fonction $g : x \mapsto \frac{2x^3+x-1}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. En $+\infty$, nous sommes face à une forme indéterminée $\frac{+\infty}{+\infty}$. On va modifier l'écriture de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall x > 0,\ g(x) = \frac{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = x\frac{2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$ donc par somme et quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}} = 2$.
Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

$$\forall x > 0,\ \frac{g(x)}{x} = \frac{x^3\left(2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$.

$$\forall x > 0,\ g(x) - 2x = \frac{2x^3+x-1}{x^2+1} - \frac{2x(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{-(x+1)}{x^2+1} = \frac{-x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{-1}{x} \times \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$$

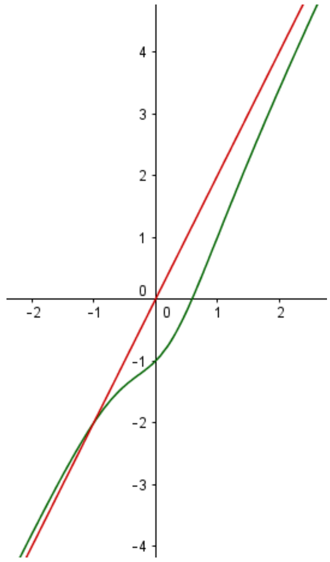
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$.
Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) - 2x = 0$. La droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.

De manière similaire, on montre qu'elle l'est aussi en $-\infty$.

2. Pour avoir la position de la courbe par rapport à son asymptote, on doit étudier le signe de la quantité $g(x) - 2x$ pour $x \in \mathbb{R}$.

$$\forall x > 0,\ g(x) - 2x = \frac{-(x+1)}{x^2+1}$$

Pour $x \in [-1,+\infty[,\ g(x) - 2x \leqslant 0$ et pour $x \in]-\infty;-1[,\ g(x) - 2x \geqslant 0$.
Donc, la courbe représentative de g est en dessous de l'asymptote sur $[-1,+\infty[$ et au dessus sur $]-\infty,-1[$.



Exercice 10: On pose $f : x \mapsto \dfrac{\mathbf{e}^{2x}}{1+x}$.
La fonction f est le produit de $g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $h : x \mapsto \mathbf{e}^{2x}$ qui sont deux fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ donc f l'est également. De plus, d'après la formule de Leibniz, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(k)} h^{(n-k)}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^{(k)} : x \mapsto \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$ et $h^{(k)} : x \mapsto 2^k \mathbf{e}^{2x}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} 2^{n-k} \mathbf{e}^{2x} = 2^n \mathbf{e}^{2x} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{k!}{(1+x)^{k+1}}$$

Exercice 11:
Déterminons l'ensemble de définition D_f de $f : x \mapsto \dfrac{x^3}{x^2-4}$.
$D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.
L'ensemble D_f est centré en 0 et $\forall x \in D_f,\ f(-x) = -f(x)$ donc la fonction f est impaire.
On peut restreindre le domaine d'étude à $\mathbb{R}_+\setminus\{2\}$. On réalisera ensuite une symétrie par rapport à l'origine O.

En tant que quotient de deux fonctions dérivables avec un dénominateur qui ne s'annule pas, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+\setminus\{2\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+\setminus\{2\},\ f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4)-x^3(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$.
La fonction f' est du signe de x^2-12. Il est du signe du coefficient de degré 2 à l'extérieur des racines.

x	0		2		$\sqrt{12}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	

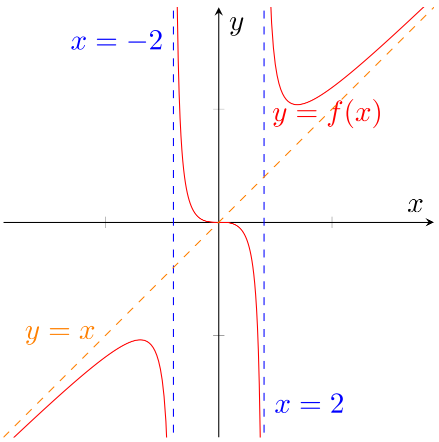
Limites et asymptotes :

En $x = 2$: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) = \dfrac{8}{0^-} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = \dfrac{8}{0^+} = +\infty$.
Donc la droite d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale à C_f.

En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2-4} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x}{x^2-4} = 0$.
Donc la droite $y = x$ est une asymptote affine en $+\infty$ à C_f.

Par symétrie par rapport au centre O, on obtient :

x	$-\infty$		$-\sqrt{12}$		-2		2		$\sqrt{12}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-f(\sqrt{12})$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(\sqrt{12})$	$\nearrow$	$+\infty$

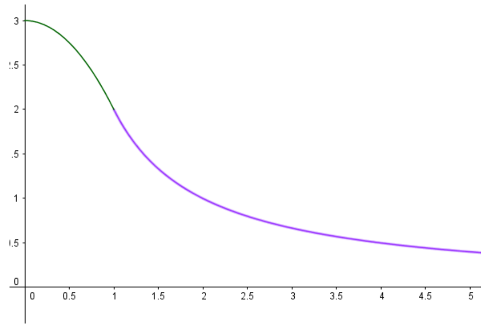


Exercice 12: Pour tout réel y fixé, la fonction $x \mapsto \mathbf{e}^x \cos(y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui justifie l'existence de la dérivée partielle par rapport à la première variable dans le premier exemple. La justification est identique pour les autres fonctions et on trouve respectivement :

1. $\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \mapsto e^x \cos y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \mapsto -e^x \sin y$.
2. $\frac{\partial g}{\partial t} : (t,u) \mapsto 2t\cos(tu) - u(t^2+u^2)\sin(tu)$ et $\frac{\partial g}{\partial u} : (t,u) \mapsto 2u\cos(tu) - t(t^2+u^2)\sin(tu)$.
3. $\frac{\partial h}{\partial R} : (R,V) \mapsto \frac{RV^2}{\sqrt{1+R^2V^2}}$, et $\frac{\partial f}{\partial V} : (R,V) \mapsto \frac{VR^2}{\sqrt{1+R^2V^2}}$.

Exercice 13:

1. La fonction f est définie par morceaux donc son graphe se construit par morceaux.



On remarque que la fonction est continue en 1 donc elle est continue sur $]0,+\infty[$.

2. Puisque f est dérivable sur $]0,+\infty[$, nous allons calculer sa dérivée. Elle se calculer par morceaux.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ \frac{-2}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction f' est strictement négative sur $]0,+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$	
$f(x)$	3	$\searrow$	2	$\searrow$	0

La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$. Elle est à valeurs dans l'ensemble $]0,3[$. Donc, la fonction f est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $]0,3[$. Notons g sa bijection réciproque définie sur $]0,3[$ et à valeurs dans $]0,+\infty[$.

3. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée ne s'annule jamais. Sa bijection réciproque est donc dérivable sur $]0,3[$ et

$$\forall y \in]0,3[,\ g'(y) = (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

Son expression exacte dépend de g.

$g(1) = 2$ (car $f(2) = 1$) donc $g'(1) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{-\frac{2}{4}} = -2$.

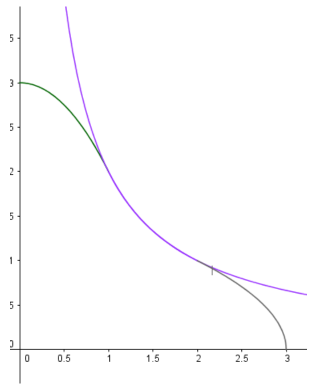
4. On va résoudre l'équation $f(x) = y$ indépendamment sur $]0,1]$ puis sur $]1,+\infty[$.

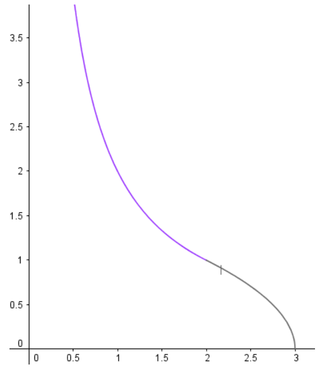
$$\begin{aligned} \forall x \in]0,1], \forall y \in [2,3[,\ f(x) = y &\Leftrightarrow 3 - x^2 = y \\ &\Leftrightarrow x^2 = 3 - y \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{3-y} \text{ ou } x = -\sqrt{3-y} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{3-y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x \in]1,+\infty[, \forall y \in]0,2[,\ f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{2}{x} = y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2}{y} \end{aligned}$$

$$g(y) = \begin{cases} \frac{2}{y} & \text{si } 0 < y < 2 \\ \sqrt{3-y} & \text{si } 2 \leqslant y < 3 \end{cases}$$

5. Le graphe de g est le symétrique de celui de f par rapport à la droite $y = x$.





Exercice 14:

1. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R},\ x^2 - 1 \neq 0\right\} = \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

2. La fonction $x \mapsto \frac{2x}{x^2-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ avec un dénominateur qui ne s'annule jamais et elle est à valeurs dans $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \mathbf{e}^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par composée puis produit, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) &= \mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} + x\mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} \times \frac{2(x^2-1) - 2x \times 2x}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{(x^2-1)^2 + 2x(x^2-1) - 4x^3}{x^2-1}\mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} \\ &= \frac{x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1}{(x^2-1)^2}\mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} \end{aligned}$$

La fonction f' est du signe du polynôme $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1$ dont on doit étudier la signe.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \left(x^2 - (1-\sqrt{5})x + 1\right)\left(x^2 - (1+\sqrt{5})x + 1\right) &= x^4 - (1+\sqrt{5})x^3 + x^2 - (1-\sqrt{5})x^3 + (1-\sqrt{5})x^2 - (1-\sqrt{5})x \\ &+ x^2 - (1+\sqrt{5})x + 1 \\ &= x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

Pour avoir le signe de $P(x)$, on va étudier les signes des deux polynômes de degré 2 :
$P_1(x) = x^2 - (1-\sqrt{5})x + 1$ et $P_2(x) = x^2 - (1+\sqrt{5})x + 1$.

Signe de P_1: $\Delta_1 = (1-\sqrt{5})^2 - 4 = 1 - 2\sqrt{5} + 5 - 4 = 2(1-\sqrt{5}) < 0$. Le polynôme n'a pas de racines réelles et il est donc de signe constant. $P_1(1) = 1 > 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\},\ P_2(x) > 0$.

Signe de P_2: $\Delta_2 = (1+\sqrt{5})^2 - 4 = 1 + 2\sqrt{5} + 5 - 4 = 2(1+\sqrt{5}) > 0$. Le polynôme a deux racines réelles:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}+\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{2} > 1 \text{ et } x_2 = \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{2} \in]0,1[$$

Signe de f': Finalement, f' est du signe de P_2

x	$-\infty$		-1		x_2		1		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

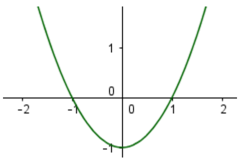
<u>Limites de la fonction f</u>

(a) <u>Limites en $-\infty$ et en $+\infty$</u>

$$\forall x > 1,\ \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x}{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$$

$\lim\limits_{x\to\pm+\infty} \frac{2}{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \mathbf{e}^X = 1$. Par composition, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} = 1$.
Par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(b) <u>Limites en -1</u>



$\lim\limits_{x\to-1^-} \frac{2x}{x^2-1}\left(=\frac{-2}{0^+}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathbf{e}^X = 0$.
Par composée, $\lim\limits_{x\to-1^-} \mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} = 0$.
Par produit, $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)(=-1\times 0) = 0$.

$\lim\limits_{x\to-1^+} \frac{2x}{x^2-1}\left(=\frac{-2}{0^-}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathbf{e}^X = +\infty$.
Par composée, $\lim\limits_{x\to-1^+} \mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} = +\infty$.
Par produit, $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)(=-1\times(+\infty)) = -\infty$.

(c) <u>Limites en 1</u>

$\lim\limits_{x\to1^-} \frac{2x}{x^2-1}\left(=\frac{2}{0^-}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} \mathbf{e}^X = 0$.
Par composée, $\lim\limits_{x\to1^-} \mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} = 0$.
Par produit, $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)(=1\times 0) = 0$.

$\lim\limits_{x\to1^+} \frac{2x}{x^2-1}\left(=\frac{2}{0^+}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \mathbf{e}^X = +\infty$.
Par composée, $\lim\limits_{x\to1^+} \mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} = +\infty$.
Par produit, $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)(=1\times(+\infty)) = +\infty$.

x	$-\infty$		-1		x_2		1		x_1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0 $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	0 $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. **<u>Etude des branches infinies</u>**
On a vu que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. Nous allons chercher une possible asymptote oblique.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\},\ \frac{f(x)}{x} = \mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}}.$$

Or, nous avons montré à la question 3. que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. On s'intéresse à la quantité $f(x) - x$.

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\},\ f(x) - x = x\mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} - x = x(\mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} - 1).$$

Ici, nous sommes face à une forme indéterminée $\infty \times 0$. Pour la lever, nous allons faire appel aux limites connues concernant la fonction exponentielle : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ après avoir modifié l'écriture de la quantité $f(x) - x$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}, \ x(\mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} - 1) = \frac{2x^2}{x^2-1} \times \frac{x^2-1}{2x}(\mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} - 1) = \frac{2x^2}{x^2-1} \times \frac{\mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} - 1}{\frac{2x}{x^2-1}}.$$

Or, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x}{x^2-1} = 0$ et $\lim\limits_{X \to 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\mathbf{e}^{\frac{2x}{x^2-1}} - 1}{\frac{2x}{x^2-1}} = 1$.
De plus, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2$ donc par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x) = 2$.
La droite d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe.

Les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ sont des asymptotes verticales.

5. Graphe de la fonction f